

1. Πιο κάτω σας δίνεται μέρος δεδομένων για μια μελέτη της σχέσης του ποσοστού λίπους στο σώμα με 3 επεξηγηματικές μεταβλητές, βασισμένη σε δείγμα 20 υγείων γυναικών ηλικίας 25-34 χρονών. Οι 3 επεξηγηματικές μεταβλητές είναι το πάχος των δερματοπτυχών στους τρικέφαλους (X_1), η περιμετρος του μηρού (X_2) και η περιμετρος στο μέσο του μπράτσου. Προσαρμόσαμε το γραμμικό μοντέλο και τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον πιο κάτω πίνακα ANAΔΙΑ. Να ελέξετε τις εξής υποθέσεις:

- a) $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$
- b) $H_0 : \beta_3 = 0$
- c) $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$

Τα ποσοστμόρια της F-κατανομής, μπορείτε να τα βρείτε με την εντολή qf στην R.

TABLE 7.1
Basic
Data—Body
Fat Example.

Subject	Triceps Skinfold Thickness X_{i1}	Thigh Circumference X_{i2}	Midarm Circumference X_{i3}	Body Fat Y_i
1	19.5	43.1	29.1	11.9
2	24.7	49.8	28.2	22.8
3	30.7	51.9	37.0	18.7
...
18	30.2	58.6	24.6	25.4
19	22.7	48.2	27.1	14.8
20	25.2	51.0	27.5	21.1

TABLE 7.4
ANOVA Table
with
Decomposition
of SSR—Body
Fat Example
with Three
Predictor
Variables.

Source of Variation	SS	df	MS
Regression	396.98	3	132.33
X_1	352.27	1	352.27
$X_2 X_1$	33.17	1	33.17
$X_3 X_1, X_2$	11.54	1	11.54
Error	98.41	16	6.15
Total	495.39	19	

2. Θεωρήστε το γραμμικό μοντέλο με p επεξηγηματικές μεταβλητές και n παρατηρήσεις.

ι) Θεωρήστε κανονικοποίηση των επεξηγηματικών μεταβλητών (μόνο, όχι της εξαρτημένης μεταβλητής Y),

$$\mathbb{E}[Y] = \beta_0' + \beta_1'X_1' + \dots + \beta_p'X_p'.$$

Να δείξετε ότι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του β_0' είναι $\hat{\beta}_0' = \bar{y}$.

ιι) Θεωρήστε κανονικοποίηση τόσο των επεξηγηματικών όσο και της εξαρτημένης μεταβλητής Y ,

$$\mathbb{E}[Y'] = \beta_0' + \beta_1'X_1' + \dots + \beta_p'X_p'.$$

Να δείξετε ότι η εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του β_0' είναι $\hat{\beta}_0' = 0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση (0.23) από το μάθημα.

3. Θεωρήστε το γραμμικό μοντέλο με p επεξηγηματικές μεταβλητές και χωρίς τεταγμένη β_0 (π.χ. γιατί οι μεταβλητές είναι κεντραρισμένες). Υποθέστε ότι οι στήλες του πίνακα σχεδιασμού \mathbf{X} είναι ορθογώνιες μεταξύ τους και βρείτε εκφράσεις για τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων $\hat{\beta}_j$, $j = 1, \dots, p$.
