

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων, ΜΑΣ 451

Οι Ασκήσεις 1-4 αναφέρονται στο απλό γραμμικό μοντέλο παλινδρόμησης.

1. Να αποδειχτεί ότι το σημείο (\bar{x}, \bar{y}) ανήκει στην εκτιμώμενη ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$.
2. Αν $e_i = y_i - \hat{y}_i, i = 1, \dots, n$, να δείξετε ότι

$$\sum_{i=1}^n e_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n e_i x_i = 0.$$

3. Αν ισχύει η υπόθεση (2) (ισοδύναμα (2')) από το μάθημα, τότε να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) &= -\frac{\bar{x}\sigma^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \bar{y}) &= \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς σε αυτή την περίπτωση οι εκτιμήτριες $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ είναι ασυσχέτιστες αν και μόνο αν $\bar{x} = 0$.

4. Υποθέστε ότι

$$\begin{aligned} y_1 &= \theta + \epsilon_1 \\ y_2 &= 2\theta + \phi + \epsilon_2 \\ y_3 &= \theta + 2\phi + \epsilon_3, \end{aligned}$$

όπου $E[\epsilon_i] = 0, i = 1, 2, 3$. Να υπολογίσετε τις εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των παραμέτρων θ και ϕ και να υπολογίσετε τη διακύμανση των εκτιμητριών αυτών, υποθέτοντας ότι τα σφάλματα ϵ_i είναι ασυσχέτιστα με σταθερή διακύμανση σ^2 .

5. Έστω το μοντέλο

$$T_i = \beta \sin(\theta_i) + \epsilon_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Αν τα σφάλματα έχουν μέση τιμή 0 και είναι ασυσχέτιστα με σταθερή διακύμανση σ^2 , να υπολογίσετε την εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων της παραμέτρου β καθώς και τη διακύμανσή της.