ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΜΑΣ 361- ΜΑΣ 660: Θεωρία Πιθανοτήτων, Χειμερινό Εξάμηνο 2019/20

5ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.

(α) Να δείξετε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα αν και μόνο αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy κατά πιθανότητα.

(β) Να δείξετε ότι η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στη X αν και μόνο αν για κάθε υπακολουθία $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ της $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υπάρχει περαιτέρω υπακολουθία $\{X_{n_{k_i}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ της $\{X_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ η οποία συγκλίνει σχεδόν παντού στην X.

Άσκηση 2: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.

(α) Αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μονότονη, να δείξετε ότι

$$X_n \overset{p}{\to} X \quad \Longrightarrow \quad X_n \overset{\sigma.\pi.}{\to} X.$$

(β) Να δείξετε ότι

$$X_n \overset{\sigma.\pi.}{\to} X \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \sup_{k\geq n} |X_k - X| \overset{p}{\to} 0.$$

Άσκηση 3: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.

(α) Να δείξετε ότι αν $X \in L^1(\mathbb{P})$ τότε $|X| < \infty$ σχεδόν παντού.

(β) Να δείξετε ότι $X \in L^1(\mathbb{P})$ αν και μόνο αν $\int_{\{|X|>c\}} |X| d\mathbb{P} \to 0$, όταν $c \to \infty$.

Άσκηση 4: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $X_n, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών.

(α) Αν οι ακολουθίες $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, να δείξετε ότι η ακολουθία $\{X_n + Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(β) Αν οι ακολουθίες $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες, να εξετάσετε αν η ακολουθία $\{X_n . Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.