ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΜΑΣ 361- ΜΑΣ 660: Θεωρία Πιθανοτήτων, Χειμερινό Εξάμηνο 2019/20

4ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega), \ \forall \omega \in \Omega.$$

Άσκηση 2: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή, δηλαδή $X(\omega) \geq 0, \forall \omega \in \Omega$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακολουθία απλών, μη-αρνητικών, τυχαίων μεταβλητών $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε

$$0 \leq X_n(\omega) \nearrow X(\omega), \ n \to \infty, \ \forall \omega \in \Omega.$$

Άσκηση 3: (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή. Να δείξετε ότι αν για κάθε $\omega \in \Omega$, έχουμε $X_n(\omega) \nearrow X(\omega), \ n \to \infty$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

Άσκηση 4: (Μοναδικότητα της Μέσης Τιμής για Απλές Τυχαίες Μεταβλητές)
Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $\{A_k\}_{k=1}^n, \{B_j\}_{j=1}^m$, όπου $n, m \in \mathbb{N}$, δυο πεπερασμένες μετρήσιμες διαμερίσεις του Ω. Έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ απλές τυχαίες μεταβλητές, τέτοιες ώστε

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad Y(\omega) = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}(\omega), \forall \omega \in \Omega,$$

όπου $a_k \in \mathbb{R}, \ k = 1, \dots, n$ και $b_j \in \mathbb{R}, \ j = 1, \dots, m$. Να δειχθεί ότι αν $X = Y$, τότε ο ορισμός της μέση τιμής απλών τυχαίων μεταβλητών δίνει

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y].$$

(συνεπώς η μέση τιμή για απλές τυχαίες μεταβλητές είναι καλώς ορισμένη)

Άσκηση 5: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή.
(α) Αν $X \in L^1(\mathbb{P})$, να δείξετε ότι

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_X(x),$$

όπου $\mathbb{P}_X$ το επαγώμενο μέτρο πιθανότητας από τη X.

(β) Αν $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση και $g(X) \in L^1(\mathbb{P})$, να δείξετε ότι

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\Omega} g(X) d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_X(x).$$

Άσκηση 6: (Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για Μη-Αύξουσες Ακολουθίες Τυχαίων Μεταβλητών) Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$, ακολουθία μη-αρνητικών τυχαίων μεταβλητών και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή.

(α) Αν $X_1 \in L^1(\mathbb{P})$ και $0 \leq X_n(\omega) \searrow X(\omega), n \to \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

(β) Έστω $M < \infty$. Αν $|X_1(\omega)| \leq M$ και $0 \leq X_n(\omega) \searrow X(\omega), n \to \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$

(τα (α) και (β) ισχύουν ακόμα και αν οι υποθέσεις τους ισχύουν σχεδόν παντού, δέστε θεωρία)
(γ) Αν $0 \leq X_n(\omega) \searrow X(\omega), n \to \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$, να δείξετε ότι δεν ισχύει απαραίτητα ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X].$$