ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΜΑΣ 361- ΜΑΣ 660: Θεωρία Πιθανοτήτων, Χειμερινό Εξάμηνο 2019/20

3ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος, έστω $A \subseteq \Omega$ και έστω $\mathbb{1}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. Να δείξετε ότι

$$\mathbb{1}_A \text{ τυχαία μεταβλητή αν και μόνο αν } \mathrm{A} \in \mathcal{A}.$$

Άσκηση 2: Έστω $(\Omega, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $X : \Omega \to \mathbb{R}$ συνάρτηση.

α) Να δείξετε ότι αν η X είναι τυχαία μεταβλητή τότε και η $|X|$ είναι τυχαία μεταβλητή (απευθείας, όχι με χρήση $|X| = X^+ + X^-$).

β) Αν η $|X|$ είναι τυχαία μεταβλητή, να εξετάσετε αν η X είναι τυχαία μεταβλητή.

Άσκηση 3: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές.

α) Αν $\forall q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ ίσχυέι ότι

$$\mathbb{P}(X \leq q_1, Y \leq q_2) = \mathbb{P}(X \leq q_1)\mathbb{P}(Y \leq q_2),$$

να εξετάσετε αν X, Y ανεξάρτητες.

β) Αν $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\mathbb{P}(X < x, Y \geq y) = \mathbb{P}(X < x)\mathbb{P}(Y \geq y),$$

να εξετάσετε αν X, Y ανεξάρτητες.

Άσκηση 4: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ενδεχομένων ορισμένη στο χώρο αυτό και έστω $\mathbb{1}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A.

α) Να δείξετε ότι $\{\mathrm{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων αν και μόνο αν $\{\mathbb{1}_A\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, ορισμένη στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

$$\sigma(\{A_n\}) = \sigma(\mathbb{1}_{A_n}).$$

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $n = 1, 2, \ldots$

$$\sigma(\{A_n, A_{n+1}, \ldots\}) = \sigma(\mathbb{1}_{A_n}, \mathbb{1}_{A_{n+1}}, \ldots).$$

Άσκηση 5: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας, έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία ανεξάρτητων ενδεχομένων ορισμένη στο χώρο αυτό και έστω $\mathbb{1}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. Έστω το σύνολο

$$S_x = \left\{ \omega \in \Omega | \lim_{n \to \infty} \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) \leq x \right\}, \ x \in \mathbb{R},$$

όπου $c_n \to \infty$, όταν $n \to \infty$. Να εξεταστεί ποιες τιμές μπορεί να πάρει η πιθανότητα $\mathbb{P}(S_n)$.