Untitled Note

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΜΑΣ 361- ΜΑΣ 660: Θεωρία Πιθανοτήτων, Χειμερινό Εξάμηνο 2019/20

2ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Έστω $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ μέτρα πιθανότητας ορισμένα στο μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{A})$.
(i) Αν $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mathbb{P}_1(A) \leq 1/2$, εξετάστε αν $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
(ii) Αν $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mathbb{P}_1(A) < 1/2$, εξετάστε αν $\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
(δώστε κατάλληλο αντιπαράδειγμα όπου είναι αναγκαίο)

Άσκηση 2: Έστω $\mathcal{A}$ ένα π-σύστημα υποσυνόλων του $\Omega \neq \emptyset$. Έστω επίσης $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ μέτρα πιθανότητας ορισμένα πάνω στη σ-άλγεβρα $\sigma(\mathcal{A})$, τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A), \forall A \in \mathcal{A}.$$

Έστω

$$\mathcal{A}^* = \{A \in \sigma(\mathcal{A}) : \mathbb{P}_1(A) = \mathbb{P}_2(A)\}.$$

Να δείξετε ότι τα μέτρα πιθανότητας $\mathbb{P}_1$ και $\mathbb{P}_2$ ταυτίζονται στη $\sigma(\mathcal{A})$ (δηλαδή ότι $\mathcal{A}^* = \sigma(\mathcal{A})$).

Άσκηση 3: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ οικογένειες υποσυνόλων του Ω, τέτοιες ώστε $\emptyset \neq \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{A}$. Να δείξετε ότι $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{D}_1$ ισχύει $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$.

Άσκηση 4: Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας και έστω $A, B \in \mathcal{A}$ ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
(i) Να δείξετε ότι A, B^c ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
(ii) Να δείξετε ότι A^c, B^c ανεξάρτητα ενδεχόμενα.

Άσκηση 5: Έστω $\{A_n\}_{n\geq 1}, \{B_n\}_{n\geq 1}$ ακολουθίες ενδεχομένων σε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
(a) Να δείξετε ότι αν $A_n \subseteq B_n$, για κάθε $n \geq 1$, τότε

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} B_n.$$

(b) Έστω $\{A_{n_k}\}_{k\geq 1}$ υπακολουθία με ανεξάρτητα ενδεχόμενα της $\{A_n\}_{n\geq 1}$ (τα στοιχεία της ακολουθίας $\{A_n\}$ εν γένει δεν είναι ανεξάρτητα) και έστω

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{n_k}) = \infty.$$

Να υπολογισθεί η πιθανότητα

$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$