ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ, Τμήμα Μαθηματικών και Στατιστικής

ΜΑΣ 361- ΜΑΣ 660: Θεωρία Πιθανοτήτων, Χειμερινό Εξάμηνο 2019/20

1ο Φυλλάδιο Ασκήσεων

Άσκηση 1: Έστω $\Omega \neq \emptyset$, τυχόν σύνολο και έστω $\mathcal{C}$ η εξής οικογένεια υποσυνόλων του Ω

$$\mathcal{C} = \{A \mid A \subset \Omega,\ A \text{ πεπερασμένο ή } A^c \text{ πεπερασμένο}\}.$$

α) Να δείξετε ότι $\mathcal{C}$ είναι άλγεβρα.
β) Αν Ω πεπερασμένο, να δείξετε ότι $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα.
γ) Αν $\Omega = [0, 1]$, να δείξετε ότι $\mathcal{C}$ δεν είναι σ-άλγεβρα.
δ) Να γενικεύσετε το συμπέρασμα του (γ) για οποιοδήποτε μη-πεπερασμένο Ω.

Άσκηση 2: Έστω $\Omega \neq \emptyset$, τυχόν σύνολο, έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία υποσυνόλων του Ω και έστω $\mathbb{1}_A$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου A. Να δείξετε ότι:

α)

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ για όλα εκτός πεπερασμένου πλήθους δεικτών } n \in \mathbb{N}\}\\ &= \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n^c}(\omega) < \infty\}\\ &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0 := n_0(\omega)\}.\end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} A_n &= \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_n \text{ για άπειρο πλήθος δεικτών } n \in \mathbb{N}\}\\ &= \{\omega \in \Omega \mid \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \infty\}\\ &= \{\omega \in \Omega \mid \text{υπάρχει υπακολουθία } k_n = k_n(\omega) \text{ με } \omega \in A_{k_n} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

γ)

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n.$$

δ)

$$\begin{aligned}(\liminf_{n\to\infty} A_n)^c &= \limsup_{n\to\infty} A_n^c\\ (\limsup_{n\to\infty} A_n)^c &= \liminf_{n\to\infty} A_n^c.\end{aligned}$$

Άσκηση 3: Έστω $\Omega \neq \emptyset$, τυχόν σύνολο και έστω $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μονότονη ακολουθία υποσυνόλων του Ω.

α) Αν $\{A_n\}$ μη-φθίνουσα, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n .$$

β) Αν $\{A_n\}$ μη-αύξουσα, να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n .$$

Άσκηση 4: Έστω $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μη-φθίνουσα ακολουθία σ-αλγεβρών.

α) Να δειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ είναι άλγεβρα.
β) Να δειχθεί ότι $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ δεν είναι απαραίτητα σ-άλγεβρα.

Άσηκση 5: Έστω $a, b \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

α) Αν $a \leq b$

$$[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}(a - \frac{1}{n}, b].$$

β) Αν $a < b$ και $n_0 > \frac{1}{b-a}$ φυσικός αριθμός,

$$(a, b) = \bigcup_{n=n_0}^{\infty}(a, b - \frac{1}{n}].$$

γ)

$$[a, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[a, a + n).$$

δ)

$$(b, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty}[b + \frac{1}{n}, \infty).$$